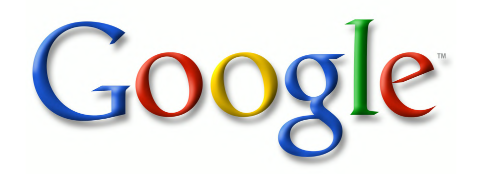



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
30 Jan. 1893.

GRÖSSEN UND ZAHLEN.

REDE

BEI

GELEGENHEIT DER FEIERLICHEN KUNDMACHUNG

DER

GELÖSTEN PREISAUFGABEN

AM

2. MÄRZ 1891

GEHALTEN VON

Dr. OTTO STOLZ,

D. Z. RECTOR DER UNIVERSITÄT INNSBRUCK.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

Hochansehnliche Versammlung!

Vierzig Jahre sind seit dem letzten Rectorate eines Mathematikers an dieser Universität, des um sie hochverdienten Professor Dr. Anton Baumgarten, verflossen. Von nicht gewöhnlicher Bedeutung für die Entwickelung der Mathematik ist gerade dieser Zeitraum. Der grossartige Aufschwung derselben datirt zwar aus der ersten Hälfte des Jahrhunderts, in welche die Wirksamkeit von Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet ganz oder doch zum grössten Theil fällt. Diese Männer haben uns als Erbe nicht allein Schöpfungen von grundlegender Bedeutung hinterlassen, sondern auch Aufgaben, deren Lösung sie erst anbahnten und Gedanken, deren Tragweite in ihren Schriften nicht völlig zum Ausdrucke gelangte. Die von ihnen ausgeführten Untersuchungen und noch mehr die Ziele, welche sie der ferneren Entwickelung der Mathematik gesteckt, haben eine neue und eingehende Prüfung der Grundlagen dieses Faches als unabweisbare Nothwendigkeit erkennen lassen. So sehen wir denn, dass während des erwähnten vierzigjährigen Zeitraumes die ersten Kräfte der Mathematik neben den weittragenden Arbeiten, durch welche sie die Förderung dieser Wissenschaft bezwecken, es nicht verschmähen, zu den Grundbegriffen derselben zurückzukehren, um sie mit bisher

nicht geübter Schärfe festzustellen. Nachdem schon Riemann manche darauf bezügliche Bemerkung von hoher Wichtigkeit gemacht hatte, haben namentlich die Herren Weierstrass und Kronecker die Verbesserung der Fundamente der Mathematik sich angelegen sein lassen. Dabei sind sie jedoch nicht zu übereinstimmenden Ansichten gelangt. Weierstrass schuf eine neue auf arithmetischen Betrachtungen fussende Theorie der irrationalen Zahlen, welche einen wesentlichen Bestandtheil seines gewaltigen Systems der Functionentheorie darstellt. Dagegen will Kronecker die irrationalen und imaginären Zahlen aus der Analysis ganz entfernen und in die Geometrie und Mechanik verweisen, von wo sie in die Arithmetik gelangt seien.[1] Nach ihm bilden nämlich „Geometrie und Mechanik" einer- und alle übrigen mathematischen Disciplinen andrerseits principiell verschiedene Wissenschaften.

Nichts würde mir näher liegen, als über die genauere Fassung zu sprechen, welche die Grundbegriffe der Analysis gegenüber einer beinahe zweihundertjährigen Praxis in den letzten vierzig Jahren erfahren haben. Allein eine solche Auseinandersetzung würde mehr Zeit erfordern, als mir zur Verfügung steht. Auch kann ich mir denken, dass die reine Mathematik durch die Versenkung in sich selbst, der sie sich gegenwärtig hingiebt, an Popularität nicht gewonnen hat. So will ich nur versuchen, Ihnen die Elemente der mathematischen Darstellung in vergleichender Betrachtung vorzuführen. Dies sind bekanntlich die Grössen und Zahlen.

Der Begriff „Grösse" stammt aus der griechischen

---

1) Kronecker, Journal für Mathem. Bd. 101. S. 339 u. 345.

Geometrie, wird indess von ihr nicht ausdrücklich erklärt. Jedenfalls dient das Wort als gemeinsame Bezeichnung für die begrenzten räumlichen Gebilde (Linien, Winkel, Flächen, Körper). Der Begriff ist jedoch von jeher allgemeiner aufgefasst worden; ja es erscheint sogar zweckmässig, von den Merkmalen, welche die Alten ihren Grössen beilegen, zunächst nur eines festzuhalten. Bei populärer Darstellung würden wir etwa sagen: „Grösse heisst jeder Gegenstand, welcher eine Grösse hat". Für die Mathematik wäre diese Definition, sowie sie ist, jedoch zu unbestimmt; wir müssen das Merkmal des Gross- und Kleinseins schärfer ausdrücken und zwar brauchen wir nur das festzusetzen, dass die unter einem und demselben Grössenbegriffe z. B. der Strecke enthaltenen Dinge sich untereinander vergleichen lassen, genauer dass je zwei von ihnen entweder als gleich oder als ungleich bezeichnet werden können. Die mathematische Betrachtung beginnt damit, dass in Betreff der ihr zu unterwerfenden Objecte einer Art, mögen dieselben nun aus der Anschauung entnommen oder bloss ersonnen sein, festgestellt wird, unter welchen Umständen zwei von ihnen als gleich oder als ungleich gelten sollen. Gleichartige Empfindungen z. B. die des Schmerzes sind zwar graduell verschieden, allein Grössen in unserem Sinne werden sie so lange nicht bilden, als man sich nicht darüber einigen kann, was unter gleichen Schmerzen, was unter dem grösseren von zwei verschiedenen Schmerzen zu verstehen ist. Derartigen Festsetzungen mag auch dann, wenn sie sich überhaupt machen lassen, noch Willkürliches anhaften; wir verlangen nur, dass sie während einer bestimmten Erörterung unverändert beibehalten werden. In der Geometrie heissen gleich zwei Figuren, die sich entweder zur Deckung bringen oder so in Theile zerlegen

lassen, dass jedem Theile der einen ein ihn deckender Theil der andern entspricht und umgekehrt. Es reicht jedoch diese Erklärung nicht immer aus; denn wollte man sich auf sie beschränken, so müsste man auf die Vergleichung einer krummlinig-begrenzten Figur mit einem Vielecke z. B. einem Quadrate verzichten. Für solche Fälle nahmen die Griechen die Vergleichbarkeit von vorneherein als möglich an und legten dann den folgenden Satz zu Grunde: „Zwei gleichartige Grössen A, B sind einander gleich, wenn sich zeigen lässt, dass bei der Annahme, dass A grösser als B ist, der Unterschied $A - B$ und bei der Annahme, dass B grösser als A ist, der Unterschied $B - A$ kleiner sein würde, als eine jede mit A, B gleichartige Grösse". Auf ihm beruhen namentlich die feinen Untersuchungen von Archimedes, während Euclid manchmal einen etwas spitzfindigen Gebrauch von seiner Verhältnisslehre macht. Das genannte Princip, welches als der Kern der Exhaustionsmethode zu betrachten ist, schliesst übrigens noch die Voraussetzung ein, dass die kleinere unter zwei gleichartigen Grössen von der grösseren weggenommen werden könne, was bei beliebig gestalteten Flächen und Körpern sich keineswegs von selbst versteht. Zur Durchführung dieses Principes musste Archimedes weiter die Annahme machen, dass wenn eine Grösse kleiner ist als eine andere, sich doch stets ein Vielfaches derselben angeben lässt, welches grösser als die letztere ist. Damit haben wir zugleich die wichtigsten Merkmale aufgezählt, welche die Alten ihren Grössen beilegten. Für unseren gegenwärtigen Zweck brauchen wir jedoch nicht länger dabei zu verweilen. Es genügt zu bemerken, dass die von den Alten betrachteten Grössenarten einer besonderen Gattung des früher aufgestellten allgemeinen Be-

griffs „Grösse“ angehören, welche ich als die „absolute Grösse (im engeren Sinne)“ bezeichne und welcher neben ihnen nicht nur die absoluten Zahlen, sondern auch die von den Alten als eine eigene Kategorie behandelten Verhältnisse ihrer Grössen zuzutheilen sind.

Ueber die letzteren dürften einige Worte am Platze sein. Wir haben hierbei nicht an die gegenwärtig übliche Lehre von den Verhältnissen und Proportionen zu denken, welche in der Arithmetik eigentlich überflüssig und in der Geometrie ungenügend ist. Diese hat wenig mehr als den Namen gemein mit der geistvollen, im 5. Buche der Euclid'schen Elemente enthaltenen Lehre, welche die schon früher berührte Methode der Grössenbildung entwickelt. Die letztere nimmt von vorneherein auf den Umstand Rücksicht, dass es Paare von incommensurabelen d. i. von Grössen gebe, wofür ein gemeinsames Mass nicht möglich ist. Ein solches Paar bilden z. B. die Seite und Diagonale eines Quadrates. Um nun derartige Fälle auch zu berücksichtigen, setzt Euclid zunächst nur fest, dass von je zwei gleichartigen Grössen die erste zur zweiten ein Verhältniss habe. Der Begriff „Verhältniss“, welcher hier noch völlig unbestimmt erscheint, empfängt einen Inhalt erst durch die Erklärungen darüber, welche Verhältnisse einander gleich und welches von zwei verschiedenen Verhältnissen das grössere heissen soll. Die 6. und die 8. Definition von Euclid's 5. Buche lauten: „In demselben Verhältniss seien Grössen, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn bei jeder beliebigen Vervielfachung die Gleichvielfachen der ersten und dritten zugleich entweder grösser oder gleich oder kleiner sind, als die Gleichvielfachen der zweiten und vierten.“ „Ein grösseres Verhältniss aber, als die 3. zur 4., hat die 1. zur 2., wenn

von gedachten Gleichvielfachen das Vielfache der ersten wohl das Vielfache der zweiten, hingegen das Vielfache der dritten nicht das der vierten übertrifft.“ Es würde gar nicht schwer sein darzulegen, wie so die Alten zu diesen anscheinend verwickelten Definitionen gelangen mussten. Allein davon kann ich hier absehen, da ich lediglich die Natur der antiken Verhältnisse beleuchten will. Wenn Archimedes in der Schrift über die Kreismessung beweist, dass das Verhältniss der Kreisfläche zum Quadrate des Durchmessers nur um wenig kleiner sei als 11 : 14, so versteht er unter dem ersteren Verhältniss nicht wie wir den 4. Theil der Ludolph'schen Zahl π, sondern ein rein abstraktes Object. Der wahre Sinn der Ungleichung selbst ist aber aus der zweiten der obigen Definitionen zu entnehmen.

Die griechische Geometrie, deren Grundbegriffe soeben erörtert wurden, ist von jeher wegen ihrer Strenge und Folgerichtigkeit gepriesen worden. Ausserdem bewundern wir an ihr die classische Ruhe und die bis auf die Einzelnheiten sich erstreckende Genauigkeit der Darstellung. Jedoch ist gegen die alten Geometer der Tadel erhoben worden, sie hätten weder ihre Grundgedanken klar und deutlich ausgesprochen, noch die Zusammengehörigkeit gewisser unter den von ihnen gefundenen Sätzen beachtet. Der erstere Vorwurf scheint mir unbegründet, der letztere fällt in sich zusammen, wenn man bedenkt, dass die Methode, welche den Zusammenhang jener Sätze aufklärt, erst im Anfange des laufenden Jahrhunderts ausgebildet wurde.

War im Uebrigen das Urtheil der Mathematiker über die Geometrie der Alten bis auf die jüngste Zeit einstimmig, so dürfte das heute nicht mehr der Fall sein. Einige werden die ideale Natur der Begriffe Punkt, Linie

und Fläche bemängeln, andere die Grundlage der Verhältnisslehre angreifen, weil Niemand bisher einen Weg anzugeben vermocht hat, auf welchem die Frage sich entscheiden liesse, ob zwei willkürlich gegebene Verhältnisse $A:B$ und $C:D$ gleich oder ungleich seien. Den letzteren möchte ich erwiedern, dass nachdem einmal festgestellt ist, dass zwei Verhältnisse entweder gleich oder ungleich sein müssen, in jedem einzelnen Falle nichts übrig bleibt, als zu sagen, dass entweder das eine oder das andere eintritt. Das fordert ja der Grundsatz des Widerspruchs oder des exclusi tertii; man müsste denn als tertium zulassen die Unmöglichkeit zu entscheiden, ob das eine oder das andere eintritt.

Mit den Schöpfungen des Apollonius von Pergä im 2. Jahrhundert v. Chr. hatte die alte Geometrie ihren Höhepunkt erreicht. An sein Werk über die Kegelschnitte und an die dürftigen Angaben, welche sich von seinen übrigen Schriften erhalten hatten, knüpften die Geometer des 16. Jahrhunderts wieder an. Mittlerweile war indessen eine grosse Veränderung mit der Mathematik vor sich gegangen. Es hatte nicht allein die numerische Rechnung durch Einführung des dekadischen Zahlensystems einen bedeutenden Aufschwung genommen, sondern es wurden auch durch die Erweiterung des Zahlbegriffes, welche sich im Laufe Eines Jahrtausends vollzogen hatte, die Schranken beseitigt, welche der Entwickelung der Algebra d. i. des Rechnens mit Zeichen von allgemeiner Bedeutung bisher entgegengestanden waren. Cartesius, der eine Schöpfer der analytischen Geometrie, hat die Bedeutung der Algebra für die Geometrie dahin formulirt, dass die Grundoperationen der Arithmetik sich auch in der Geometrie verwenden lassen. Nicht völlig jedoch deckt sich das von

ihm erfundene Verfahren mit dem der heutigen analytischen Geometrie; denn es ruht, wie wir sogleich sehen werden, auf einer anderen, weniger abstracten Grundlage. Um ihretwillen erblicken wir in Cartesius auch den Urheber der formalen Algebra.

Die verschiedenen Arten von Zahlen, von denen wir im Folgenden hören werden, erscheinen als besondere Fälle dem Eingangs aufgestellten allgemeinen Grössenbegriffe untergeordnet.

Das classische Alterthum kannte von den Zahlen nur die absoluten rationalen, d. i. die ganzen und gebrochenen Zahlen. Das Rechnen mit ihnen war indess schon hoch entwickelt. Es wurden, wie wir namentlich aus dem Commentar des Theon von Alexandrien zum Almagest erfahren[1]), nicht allein die vier Species ausgeführt, sondern auch Quadratwurzeln in dem Sinne ausgezogen, dass man rationale Zahlen zu ermitteln verstand, deren Quadrat von einer gegebenen Zahl beliebig wenig abweicht. Das zur Lösung der letzteren Aufgabe angewandte Verfahren unterscheidet sich von dem heute üblichen nur dadurch, dass anstatt der Decimalbrüche die babylonischen Sexagesimalbrüche benutzt wurden. Der Umstand, dass eine systematische Schreibweise für die natürlichen Zahlen fehlte, machte wohl das Rechnen schwerfällig, konnte aber die Entwickelung der Theorie nicht wesentlich beeinflussen.

Negative und irrationale Zahlen waren den Griechen fremd; man begegnet denselben im christlichen Abendlande angeblich zuerst zu Beginn des 13. Jahrhunderts bei Leonardo von Pisa (Fibonacci). Sie werden dorthin, wie

---

1) M. Cantor, Gesch. d. Math. I. S. 418.

das dekadische Zahlensystem, aus dem fernen Indien durch Vermittelung der Araber gelangt sein. Die negativen Zahlen gelten aber zunächst noch als Zahlen, „welche von den Leuten nicht gebilligt werden“ (beim Hindu Bhâskara)[1] oder gar als numeri absurdi (bei Stifel). Negative Wurzeln einer Gleichung heissen aestimationes falsae oder fictae.[2] Die Rechnung mit der Null und den negativen Zahlen beginnt erst in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Der Niederländer Albert Girard († um 1633) und Cartesius haben sich in dieser Beziehung die meisten Verdienste um die Algebra erworben; ersterer durch ein 1629 erschienenes Werk, welches mit Recht den Titel „Invention nouvelle en l'Algèbre etc.“ führt, letzterer durch seine Géométrie (1637).[3] Beide erklären die negativen Wurzeln geometrisch als Strecken, deren Richtung entgegengesetzt ist derjenigen, welche die den positiven Wurzeln entsprechenden Strecken angeben.[4] Während aber bei Girard sich nur die Bemerkung „die negative Lösung wird geometrisch durch Rückwärtsschreiten dargestellt“ („la solution par moins s'explique en géométrie en rétrogadant“)[5] findet, hat Cartesius diesen Gedanken für eine Reihe von Aufgaben thatsächlich verwerthet. Dass Fermat, der andere Schöpfer der analytischen Geometrie, welcher die Darstellung der Gleichungen zwischen den Coordinaten durch Kurven vor Cartesius bekannt machte, auch die

1) M. Cantor a. a. O. I. S. 528—31.
2) K. Fink, Kurzer Abriss e. Gesch. d. Elementarmathematik 1890 S. 77.
3) Klügel, Lexicon I. S. 52 ff.
4) Klügel a. a. O. S. 57. Descartes, Geometria Ausgabe von Schooten 1659 p. 87.
5) Suter, Gesch. d. math. Wissenschaften II. S. 19.

soeben erwähnte Deutung der negativen Wurzeln gebrauchte, geht aus seinen Schriften nicht mit Bestimmtheit hervor.

Aehnlich wie mit den negativen Zahlen verhielt es sich mit den irrationalen.[1]) Diese wurden bis in's 16. Jahrhundert nach Leonardo von Pisa als numeri surdi bezeichnet, welches Wort vermuthlich die Uebersetzung des arabischen Kunstwortes ist, das das griechische *ἄῤῥητος* oder *ἄλογος* wiedergeben sollte.[2]). Erst Stifel erklärt die irrationalen Zahlen in seiner Arithmetica integra (1544) als eigentliche Zahlen und beschäftigt sich eingehend damit.[3]) Auch hinsichtlich der Auffassung der irrationalen Zahlen bildet des Cartesius Géométrie einen Wendepunkt. Er rechnete zwar mit den Linien als solchen, d. h. identificirte gewisse geometrische Constructionen mit den vier Species der Arithmetik. Dabei benutzte er die schon vor ihm aufgekommene, an sich unscheinbare, aber für die weitere Entwickelung der Geometrie geradezu entscheidende Neuerung, jede Strecke mit einem einzigen Buchstaben zu bezeichnen statt wie die Alten mit zwei, nämlich den Zeichen ihrer Endpunkte. Unter den Strecken wählte er eine übrigens beliebige aus, welche er die Einheit nannte und meist mit 1 bezeichnete. Er erklärt dann z. B. als Product zweier Strecken diejenige Strecke, welche sich zu einer von ihnen so verhält, wie die andere zur Einheit; dieses Product ist also die vierte geometrische Proportionale zu den beiden Strecken und der Einheit. Jedoch erscheint die Strecke im Allgemeinen bei Cartesius noch

---

1) Nach Euclid, Elem. X. Def. 6, sind auch die Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen als rational zu bezeichnen.

2) Baltzer, Elemente der Mathematik I. 5. Aufl. S. 105.

3) Gerhardt, Gesch. d. Math. in Deutschland S. 69.

nicht als Zahl, wohl aber hat seine Strecken-Rechnung die Auffassung aller Strecken als Zahlen bei Festsetzung einer bestimmten als Einheit nahegelegt. Wir treffen diese Ansicht jedenfalls schon bei Newton, welcher sagt[1]): „unter Zahl verstehen wir das Verhältniss einer Grösse zu einer ihr gleichartigen, welche als Einheit gewählt ist." Hierbei meint er freilich nur die absolute Zahl; indess gebraucht er selber anderwärts die Ausdrücke: negative Zahl und sogar unmögliche Zahl.[2])

Auffallend ist, dass Newton nicht angiebt, wie die vier Species an den allgemeinen irrationalen Zahlen auszuführen seien; so vermissen wir z. B. die Erklärung des Productes von je zweien derselben. Wahrscheinlich hielt er dafür, dass die gerade mitgetheilte Multiplicationsregel des Cartesius in das Gebiet der Geometrie gehöre. Im Laufe der Zeit wurde das Verfahren, die irrationalen Zahlen an die Messung der Raumgrössen anzuknüpfen, indess in der angedeuteten Richtung ergänzt.[3])

Die irrationalen Zahlen machten die „Verhältnisse" der Alten überflüssig und führten, wie bemerkt, zur analytischen Geometrie; die von Leibniz und Newton erfundene Infinitesimalrechnung wies den „neuen Weg" zu den von Archimedes zu Stande gebrachten Quadraturen

1) Newton, Arithmetica universalis ed. Gravesande 1732 S. 4.

2) Newton a. a. O. S. 180, 182.

3) Die Ergänzungen der geometrischen Theorie der irrationalen Zahlen begegnen in zweifacher Gestalt; die eine findet man bei J. H. Tr. Müller, Lehrbuch d. allg. Arithmetik 2. A. 1855 S. 73 ff., die andere in den Traités d'Arithmétique und d'Algèbre von J. Bertrand. Auf die einfachen Constructionen des Productes und Quotienten zweier irrationalen Zahlen nach Cartesius scheint Niemand mehr zurückgekommen zu sein; sie erscheinen als besondere Fälle der bezüglichen Erklärungen für die geometrischen Verhältnisse, welche in meinen Vorles. ü. allg. Arithmetik I. S. 95 gegeben sind.

nnd Kubaturen.[1]) Die Geschichte dieser neuen Wissenschaft erzählt von Missverständnissen und Widersprüchen in den Grundbegriffen, woran die Entdecker, namentlich Newton, welcher vielleicht das Geheimniss seiner Methode nicht völlig entschleiern wollte, nicht ohne Schuld waren. Auch der Einfluss ihrer Vorläufer Kepler, Cavalieri, Gregor von St. Vincent, Roberval mochte bewirken, dass die Differential- und Integralrechnung mit Vorliebe auf actuale[2]) unendlich kleine Grössen (quantitates infinitesimae) gegründet wurde. Welche Unsicherheit dabei herrschte, dürfte besser als weitläufige Erörterungen, eine einzige Anekdote kennzeichnen. Bossut erzählt in seiner Geschichte der Mathematik[3]), er habe den berühmten Geometer Fontaine um Aufklärung hinsichtlich einiger Behauptungen über die unendlich kleinen Grössen gebeten und von ihm die Antwort erhalten: „Nehmen Sie die unendlich kleinen als eine Hypothese an, studieren Sie die Anwendung und der Glaube wird Ihnen kommen." Es lässt sich in der That schwer begreifen, wie hervorragende Mathematiker z. B. Johann Bernoulli und sein Schüler der Marquis de l'Hospital, ja selbst noch Poisson die Behauptung aufstellen konnten, es gebe Grössen, welche von Null verschieden und gleichwohl kleiner seien als jede angebbare Grösse. Demnach soll ein Mittleres zwischen Null und endlicher Grösse, zwischen Nichts und Etwas vorhanden sein! Wer das nicht zugeben will, dem bleibt

---

1) Zur Geschichte der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung vergleiche man die Zusätze von J. K. F. Hauff zu seiner Uebersetzung von Carnot's: „Reflexions sur la theorie du calcul infinitésimal" (1800) und Mansion's Esquisse de l'histoire du calcul infitésimal in seinem Cours d'Analyse infités. (1887).

2) Vgl. Hauff a. a. O. S. 60, 105.

3) II. p. 272 in der Uebersetzung von Reimer (1804).

nichts übrig, als eine Grösse, die kleiner ist als jede angebbare, als Nichts oder Null zu erklären. Das that denn auch Euler. Wenn er aber fortfährt: Obgleich je zwei Nullen einander gleich seien, so könne ihr geometrisches Verhältniss von dem Verhältnisse der Gleichheit verschieden sein[1]), so verfällt er in den schweren Fehler, dass er in einer und derselben Untersuchung die nämlichen zwei Grössen sowohl als gleich als auch als ungleich betrachtet. Kein Wunder, dass man sich nach solchen Zumuthungen an den gesunden Menschenverstand nach der Klarheit und Widerspruchslosigkeit der alten Geometrie zurücksehnte! Manche glaubten, es fehle der neuen Theorie zur Strenge nur die äussere Form und versuchten sie in der Weise der Alten darzustellen. Ein gelehrter Bürger von Verona, Giuseppe Torelli, veröffentlichte 1758 zwei Bücher de nihilo geometrico, in welchen er die Alten getreu nachzuahmen gedachte. Er stellte dem nihil metaphysicum d. i. der Negation an sich als nihil geometricum die Negation eines concreten Gegenstandes gegenüber, also sozusagen die Erinnerung an einen Gegenstand, welcher zu sein aufgehört hat, oder, wenn ein Vergleich aus der classischen Mythologie gestattet ist, seinen Schatten. Wir können jedoch nicht zugeben, dass Torelli's ernsthafte Bemühungen den von ihm gewünschten Erfolg hatten. Zwar beruft er sich auf Euclid's 5. Buch, hält sich aber nicht an die darin dargelegten Grundsätze. Er geht nicht davon aus zu erklären, unter welchen Umständen zwei seiner Nichtse einander gleich zu erachten seien, sondern begnügt sich mit der mathematisch bedeutungslosen Wort-

---

1) Euler's Diff.-Rechnung deutsch v. Michelsen § 83, S. 310, § 112 f.

definition: „Vergleichung ist irgend zweier Dinge Zusammenstellung". (Comparatio est duorum quorundam collatio.)

Man darf sich überhaupt darüber verwundern, dass die dem 5. Buche von Euclid's Elementen zu Grunde liegenden Gedanken gerade von den Verehrern der alten Geometrie entweder nicht genau erkannt oder nicht gehörig verwerthet wurden. Dieser wohl von Eudoxus herrührende Abschnitt der Elemente lehrt eben die Methode, nach welcher neue Grössen in der Mathematik geschaffen werden können, und ist sohin, wie kaum ein anderes Stück der aus dem Alterthume überkommenen mathematischen Schriften, ein unvergängliches Denkmal des Scharfsinns der Hellenen und ihrer Begabung für exacte Wissenschaft. Von so manchem Mathematiker des 19. Jahrhunderts wurde dieses Verfahren ohne Zweifel selbständig wiedergefunden. Desselben bedienen sich die neuen, arithmetischen Theorien der irrationalen Zahlen[1]); mit seiner Hilfe ist es in unseren Tagen auch gelungen, widerspruchsfreie actuale unendlich grosse und unendlich kleine Grössen aufzustellen.[2]). Allerdings mussten dabei mehrere Eigenschaften der gewöhnlichen absoluten Grössen aufgegeben werden.

Heute kann ich mich jedoch nicht mit diesen neuen Grössen beschäftigen, indem ich ja noch nicht einmal alle

---

1) Es sind die Theorien der irrationalen Zahlen von Weierstrass, Dedekind, G. Cantor gemeint.

2) Hier sind gemeint die transfiniten Zahlen des Hrn. G. Cantor und die von Hrn. P. Veronese angekündigten neuen infiniti und infinitesimi attuali (Mem. della Acc. dei Lincei ser. 4. Vol. VI. p. 603); ferner die von mir nach den Angaben von P. du Bois-Reymond hergestellten zwei Systeme von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen (vgl. z. B. Math. Annalen 31. Bd. S. 601).

in der allgemeinen Arithmetik vorkommenden Zahlenarten angeführt habe.

Schon beim Hindu Bhâskara begegnet man der Bemerkung[1]), dass das Quadrat einer positiven wie einer negativen Zahl eine positive Zahl ist, dass es also keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl giebt. Trotzdem schrieben die Cossisten des 16. Jahrhunderts, namentlich Cardano und Bombelli[2]), Quadratwurzeln aus negativen Zahlen an; sie bezeichneten sie freilich als unmöglich. Der schon erwähnte Girard trat auch hier mit Entschiedenheit auf, indem er neben den reellen Wurzeln der Gleichungen auch die unmöglichen berücksichtigte. Durch Zulassung derselben gelangte er zum Satze, dass jede algebraische Gleichung so viele Wurzeln besitze, als ihr Grad Einheiten enthält. Cartesius nannte die positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung „real“, die unmöglichen „imaginär“; denn die ersteren lassen sich als Strecken construiren, während den letzteren keine solchen entsprechen.[3])

Der grosse Rechner Euler, dem die Infinitesimalrechnung trotz seiner ungenügenden Begründung derselben zahlreiche Anregungen verdankt, beschäftigte sich auch viel mit den unmöglichen Zahlen und vermochte mit ihrer Hilfe einen nahen Zusammenhang zwischen den Potenzen und den trigonometrischen Functionen aufzudecken. Später benutzte sie Gauss auch in zahlentheoretischen Untersuchungen. Von ihm rührt die Bezeichnung „complexe“

1) M. Cantor a. a. O. S. 531.

2) Fink a. a. O. S. 78.

3) Vgl. Descartes Geometria wie o. p. 76. Die Stelle lautet: Caeterum radices tam verae quam falsae non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae etc. Diese dunkle Wendung wurde von Newton (Arithm. univ. p. 182) fast wörtlich wiederholt.

Zahl für die Summe einer reellen Zahl und der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl her.[1])

Complex heissen nämlich Zahlen, welche durch Zusammensetzung von zwei oder mehreren Reihen reeller Zahlen von verschiedener Benennung entstehen. Eigentlich gehören zu den complexen Zahlen schon die mehrfachbenannten Zahlen, mit welchen uns der Rechenunterricht in der Volksschule bekannt macht. 7 fl. 3 kr. ist z. B. eine complexe Zahl, da die zuerst genannte Zahl 7 sich auf den Gulden, die an zweiter Stelle genannte 3 sich auf den Kreuzer als Einheit bezieht. Diese beiden Einheiten stehen freilich in der denkbar einfachsten Beziehung zu einander, die erstere ist ein Vielfaches der letzteren oder letztere ein genauer Theil, eine Untereinheit der ersteren. In der That hiessen noch vor hundert Jahren unsere mehrfach benannten Zahlen complexe Zahlen.[2]) Gauss hat nun zuerst in klarer Weise ausgesprochen, dass die Zusammenstellung von Zahlen verschiedener Benennung zu einem Zahlensystem sich bedeutend verallgemeinern lasse.[3]) Dazu führt uns die folgende Betrachtung.

Legen wir uns die Frage vor, auf welche Art wir einen Punkt einer Ebene, etwa des rechteckigen Bodens eines Saales unzweideutig bestimmen können. Wir gehen von einer Ecke, welche wir als den Nullpunkt der Coordinaten bezeichnen, aus, schreiten auf der Längskante des Bodens bis zum Fusspunkte des von dem ins Auge gefassten Punkte auf diese Kante gefällten Lothes vor und begeben uns von da längs dieses Lothes zum Punkte.

---

1) Gauss, Werke II. S. 102.

2) Vgl. Bézout, Cours de Math. 1767. I. p. 105, Klügel, Lexicon II. S. 734.

3) Gauss, Werke II. S. 174.

Durch Abmessung dieser beiden aufeinander senkrechten Strecken erhalten wir zwei Zahlen, mittelst welcher wir den gegebenen Punkt jederzeit wiederzufinden vermögen. Die erste heisst seine Abscisse, die andere seine Applicate oder Ordinate, beide zusammen seit Leibniz seine Coordinaten. Zufolge dieser Erklärungen wird es klar sein, was man z. B. unter dem Punkte von 7 Metern in der Richtung der Länge oder der Abscissen und 3 Meter in der Richtung der Breite oder der Ordinaten zu verstehen hat. Derselbe Punkt kann auch bezeichnet werden durch eine complexe Zahl, nämlich 7 Meter Länge mehr 3 Meter Breite. Sagen wir für die Einheit der Abscissen schlechtweg 1, für die der Ordinaten i, so wird die complexe Zahl $7 + 3i$ den in Rede stehenden Punkt völlig bestimmen. Solchergestalt wird jedem Punkte der Ebene, in welcher zwei aufeinander senkrechte Gerade als Grundrichtungen gewählt sind, vermöge seiner Coordinaten xy eine complexe Zahl $x + yi$ entsprechen und umgekehrt werden wir ohne Weiteres den zu jeder solchen Zahl gehörigen Punkt zu construiren wissen. Die auf diese Art mittelst der Ebene gewonnenen complexen Zahlen unterscheiden sich von den mehrfach benannten Zahlen der bürgerlichen Rechenkunst lediglich darin, dass zwischen den zu Grunde liegenden Einheiten 1 und i keine numerische Beziehung obwaltet. Statt dem Punkte (x, y) die complexe Zahl $x + yi$ zuzuordnen, lässt man ihr auch die Strecke, welche den Nullpunkt der Coordinaten mit demselben verbindet, entsprechen; natürlich muss dabei nicht allein ihre Länge, sondern auch ihre Richtung in Betracht gezogen werden. Strecken in diesem Sinne heissen in der englischen Litteratur passend Vectoren.

Ein System von Zahlen wird aber nicht um seiner

selbst willen aufgestellt, sondern um mit ihnen zu rechnen. Zur Summe zweier complexen Zahlen gelangen wir sofort mit Hilfe der Additionsregel für die mehrfach benannten Zahlen: wir vereinigen die gleichnamigen Bestandtheile beider Zahlen und stellen diese Theilsumme zu einer neuen complexen Zahl zusammen. Z. B. die Zahlen $7 + 3i$ und $4 + 5i$ liefern die Summe $11 + 8i$. Sowie jede complexe Zahl, so lässt sich auch die Summe irgend zweier complexen Zahlen durch einen Vector in der Ebene darstellen. Und zwar giebt es ein bequemes geometrisches Verfahren, um die Summe zweier Vectoren zu construiren: man setze im Endpunkte des ersten Vectors einen dem zweiten gleichen, d. h. eine Strecke, welche mit ihm gleiche Länge und Richtung hat, an und verbinde den Endpunkt derselben mit dem Nullpunkte. Man bezeichnet diese Construction, welche genau so wie die der Resultirenden zweier Kräfte mit Hilfe eines Parallelegramms durchgeführt wird, als geometrische Addition. Aus ihr ergiebt sich leicht die Subtraction zweier Vectoren.

Nicht so nahe wie die Definition der Summe liegt die des Productes zweier complexen Zahlen. Zunächst hat man sich gegenwärtig zu halten, dass auch dieses zu den Zahlen des Systemes gehören und nicht etwas davon verschiedenes sein soll. Man könnte glauben, dass weil 1 die Längeneinheit auf der Abscissenaxe bedeutet, $1 \cdot 1$ die Flächeneinheit sein müsse. Allein diese Annahme ist hier zufolge der soeben erwähnten Forderung unbrauchbar. Wir setzen vielmehr $1 \cdot 1 = 1$ und nehmen an, dass wie in der Theorie der reellen Zahlen die Multiplication mit 1 den anderen Factor ungeändert lässt, sodass z. B. $i \cdot 1 = 1 \cdot i = i$ ist. Was soll aber $i \cdot i$ sein? Vorläufig möge $i \cdot i$ irgend eine reelle oder complexe Zahl $g + hi$ sein. Sind nun die Pro-

ducte der Einheiten 1 und i mit sich selbst und mit einander festgesetzt, so gelangen wir zum Producte zweier beliebigen complexen Zahlen, indem wir die Regel über die Multiplication zweier Summen auch für die von diesen Zahlen dargestellten Summen gelten lassen. Ihr zufolge wird also das Product der genannten Zahlen gebildet, indem man jeden der beiden Bestandtheile der einen mit jedem Bestandtheil der andern multiplicirt und die so erhaltenen Theilproducte addirt.

Um $a + bi$ mit einer anderen complexen Zahl $c + di$ zu multipliciren, hat man demnach zunächst die Theilproducte $(a1)(c1)$, $(a1)(di)$, $(bi)(c1)$, $(bi)(di)$ zu bilden. Ein jedes derselben wird ersetzt durch jene Zahl, welche zu dem Producte der darin vorkommenden Einheiten in der nämlichen Beziehung steht, wie das Product der beiden Coefficienten zur numerischen Einheit 1. So tritt an Stelle des ersten ac, an die des zweiten $(ad)i$, an die des dritten $(bc)i$, endlich an die des vierten $(bdg) + (bdh)i$. Schliesslich findet man mithin $(a + bi)(c + di) = (ac + bdg) + (ad + bc + bdh)i$.

Das auf diese Art gewonnene Ergebniss ist noch sehr allgemein. Wir versuchen das neue Product näher zu bestimmen durch die Forderung, dass wenn möglich die bekannten Regeln der allgemeinen Arithmetik über die Multiplication zweier Zahlen an demselben erfüllt sein sollen. Von ihnen besteht bereits der Satz, dass $A \cdot B = B \cdot A$ ist. Allein von anderen Sätzen, z. B. dass das dreigliedrige Product $(A \cdot B) \cdot C$ gleich $A \cdot (B \cdot C)$ sei, gilt das noch nicht. Es zeigt vielmehr eine Untersuchung von Weierstrass, dass alle Systeme von complexen Zahlen, deren Multiplication den nämlichen Gesetzen gehorcht, wie die der reellen Zahlen, dann erhalten werden, wenn für $i \cdot i$

eine der Zahlen 1, 0, — 1 gewählt wird. So stehen wir also vor drei Systemen complexer Zahlen, welche hinsichtlich der drei Species Addition, Subtraction und Multiplication das nämliche Verhalten zeigen. Sie unterscheiden sich aber durch die vierte Rechnungsart, die Division. In den beiden ersten Systemen giebt es nämlich Zahlen, welche in Null dividirt, einen von 0 verschiedenen Quotienten liefern, während für das dritte System jeder Quotient, dessen Dividend Null und dessen Divisor von 0 verschieden ist, Null ist. Mit anderen Worten: nur für die Zahlen des dritten Systemes besteht der bekannte arithmetische Satz: „Ist das Product zweier Zahlen gleich Null, so muss mindestens eine von ihnen gleich Null sein". Demnach zeigt nur das Rechnen mit den complexen Zahlen des dritten Systemes eine durchgreifende Analogie mit dem der reellen Zahlen. Sie stimmen aber vollkommen überein mit den complexen Zahlen der allgemeinen Arithmethik, von welchen früher die Rede war. Unter ihnen befindet sich namentlich eine, nämlich i, deren Quadrat gleich — 1 ist. Die gemeinen complexen Zahlen sind also keineswegs unmöglich; sie lassen sich vielmehr ebenso anschaulich darstellen, wie die reellen Zahlen; nur reicht hierzu nicht mehr die Gerade aus, sondern es bedarf eines zweidimensionalen Gebildes, der Ebene.

Leicht ist es, für das Product wie für den Quotienten zweier Vectoren die geometrische Darstellung zu finden. Der Kürze halber sei jedoch hier davon abgesehen. Für uns genügt die Bemerkung, dass die Vectoren in einer Ebene ein System von Grössen bilden, mit dem man genau so rechnen kann, wie es in der allgemeinen Arithmetik gelehrt wird. Jeder solchen Rechnung entspricht eine geometrische Construction, sowie umgekehrt viele geome-

trische Aufgaben sich mit Hilfe der Vectoren in überraschend einfacher Weise lösen lassen. Der Gebrauch der Vectoren führt zu einem eigentlichen geometrischen Calcul in der Ebene, wodurch die in einer Aufgabe gesuchten Punkte unmittelbar gefunden werden.

Wichtiger noch als für die Ebene wäre für den Raum eine Rechnung, welche nicht bloss Längenzahlen, sondern die gesuchten Constructionselemente vollständig, d. i. auch ihre Lage gegenüber der gegebenen liefert. Sie würde uns schon desshalb willkommen sein, weil es schwierig ist, sich räumliche Figuren von einiger Verwickelung überhaupt nur vorzustellen.

Wollen wir die soeben für die Ebene erhaltenen Ergebnisse auf den Raum auszudehnen versuchen, so haben wir zunächst zu bemerken, dass zur Bestimmung eines Punktes im Raume drei Coordinaten erforderlich sind. Ist in der That in einem Saale ein Punkt gegeben, so denken wir uns von ihm ein Loth auf den Boden gefüllt. Sein Fusspunkt kann wie jeder andere Punkt der Ebene durch Abscisse und Ordinate charakterisirt werden. In der Senkrechten aber, welche in diesem Punkte auf die Ebene errichtet ist, wird ein jeder Punkt durch den Abstand von ihm, d. i. seine Höhe über dem Boden bestimmt. Die Länge desselben mit seinem Zeichen bildet die dritte Coordinate z. Fixiren wir einen Punkt im Raume als Nullpunkt der Coordinaten, legen durch ihn drei aufeinander senkrechte Richtungen und bezeichnen die Längeneinheiten in ihnen mit $1, i, k$, so wird ein beliebiger Punkt des Raumes durch eine aus den drei Einheiten $1, i, k$ gebildete complexe Zahl $x + yi + zk$ dargestellt. Man kann diese Zahl auch durch die Strecke oder den Vector deuten, welcher den Nullpunkt mit dem Punkte (xyz) verbindet. Wir stehen

somit vor dem Systeme der Vectoren im Raume, welche uns als complexe Zahlen mit drei Einheiten erscheinen.

Was das Rechnen mit diesen Vectoren anbelangt, so können wir zwar die Addition ganz ähnlich ausführen wie in der Ebene, aber unmöglich ist eine Multiplication derselben, welche den in der allgemeinen Arithmetik üblichen Regeln gehorcht. Es liefern also die Vectoren im Raume, wie Gauss im Jahre 1831 zuerst bemerkte[1]), keine in der allgemeinen Arithmetik zulässige Art von Grössen. — Damit ist aber die Sache nicht zu Ende. Die Rechnungsregeln der allgemeinen Arithmetik bilden nämlich kein Ganzes in dem Sinne, dass mit einer jeden von ihnen alle übrigen nothwendig verknüpft sind.

Gelingt es nicht das Rechnen mit den räumlichen Vectoren in der üblichen Weise einzurichten, so haben wir mithin noch zu versuchen, ob sich aus ihnen nicht durch Abänderung der Multiplicationsregeln ein für die Geometrie brauchbares Hilfsmittel machen lässt.

Bei dieser Untersuchung müssen wir darüber klar sein, in welcher Weise die Regeln der gewöhnlichen Multiplication von einander abhängen. Die Gesammtheit derselben lässt sich zurückführen auf drei von einander unabhängige formale Gesetze, das associative, commutative und distributive. Das associative Gesetz, welches in den älteren Lehrbüchern kaum berührt wird, bezieht sich auf Producte von drei oder mehr Factoren. Um ein solches überhaupt zu bilden, muss man zuerst zwei der gegebenen Zahlen mit einander multipliciren, hierauf ihr Product mit einer dritten von ihnen u. s. f. bis alle Factoren erschöpft sind. Dieser Vorgang ist auch, wenn wir uns die Factoren in eine be-

1) Gauss, Werke II. S. 178.

stimmte Anordnung gebracht denken, noch auf verschiedene Weise möglich. Liegen z. B. drei Factoren und zwar in der Ordnung ABC vor, so kann ich noch die beiden Producte $(AB) \cdot C$ und $A \cdot (BC)$ bilden. Dass sie einander gleich sind, ist der einfachste Fall des Gesetzes der Association, welcher übrigens die Giltigkeit desselben für mehr als dreigliedrige Producte von selbst nach sich zieht. Erst das Bestehen dieses Gesetzes berechtigt uns von Producten ABC, $ABCD\ldots$ u. s. w. schlechtweg zu sprechen. Bekannter sind die beiden anderen Gesetze der gewöhnlichen Multiplication. Der Satz, dass das Product bei Vertauschung der Factoren ungeändert bleibt, wird unter dem commutativen Gesetze verstanden. In Verbindung mit dem associativen Gesetze reicht der einfachste Fall des commutativen, d. i. der Satz dass $A \cdot B$ und $B \cdot A$ die nämliche Zahl sind, hin, um die allgemeine Giltigkeit des letzteren sicher zu stellen. Erinnern wir uns endlich daran, dass man um eine Summe mit einer Zahl zu multipliciren, jeden ihrer Bestandtheile mit dieser Zahl multipliciren, und die so erhaltenen Producte addiren muss, so haben wir den Inhalt des distributiven Gesetzes. Will man es ganz allgemein aussprechen, so muss man noch unterscheiden, ob die Summe Multiplicand oder Multiplicator sein soll. So erhält man die sogenannten „beiden Seiten" des distributiven Gesetzes, welche übrigens schon allgemein bestehen, wenn sie nur für zweigliedrige Summen gelten, d. i. wenn die Relationen

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \qquad A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

richtig sind.

Auf dem Bestehen der beiden erstgenannten Gesetze für die Addition und aller drei für die Multiplication be-

ruht die Leichtigkeit und Bequemlichkeit des gebräuchlichen Rechnens. Je mehr wir von ihnen ausser Kraft setzen, um so umständlicher gestaltet sich das Rechnen, um so mehr nimmt es unsere Aufmerksamkeit in Anspruch. Indess sind nicht alle drei Gesetze von der nämlichen Wichtigkeit. Bei wirklichen Versuchen wird man sich leicht davon überzeugen, dass hinsichtlich ihrer Bedeutung für den Rechner das distributive Princip den beiden anderen, und von diesen das associative dem commutativen vorangeht. Lässt man lediglich das letzte, sei es bei der Addition oder bei der Multiplication, fallen, so erhält man noch immer Rechnungsoperationen, welche zu praktischer Anwendung geeignet sind.

Seit dem Jahre 1833 beschäftigte sich der englische Mathematiker und Physiker Sir William Rowan Hamilton mit Versuchen, für die Vectoren im Raume eine Multiplication aufzustellen, wodurch dieses Zahlensystem zur Behandlung von geometrischen Aufgaben tauglich werden sollte. Erst nach zehnjährigen Bemühungen gelangte er zu einem befriedigenden Ergebnisse. Die neuen Zahlen, welche sich als ein brauchbares Hilfsmittel für die Geometrie und Mechanik erwiesen haben, sind indess auf vier Einheiten gegründet, wesswegen sie Hamilton Quaternionen nannte. Die erste Einheit ist die reine Zahl 1, die drei anderen sind die Strecken von der Länge 1 auf drei gegeneinander senkrechten Richtungen xyz z. B. auf den Kanten einer rechtwinkligen Ecke. Diese Einheitsvectoren seien nach ihm mit i, j, k bezeichnet. Die Quaternionen umfassen nun dreierlei Arten von Zahlen: Zunächst die Scalare oder reellen Zahlen, welche in der Figur nur mittelbar als Verhältnisse zweier Längen zum Ausdruck gelangen. Dann die Vectoren, d. i. die vom

Nullpunkte ausgehenden Strecken mit dem numerischen Ausdruck $xi + yj + zk$ und endlich die eigentlichen Quaternionen: Summen von Zahlen und Vectoren, nach der Bezeichnung Hamilton's: Skalar + Vector $(w + xi + yj + zk)$. Bei geometrischer Darstellung erscheinen als die Bestimmungsstücke einer Quaternion: ihre Ebene, ihr Winkel und ihr Tensor, letzterer eine absolute Zahl. Von der Ebene kommt jedoch nur ihre Stellung im Raume in Betracht, es gelten nämlich parallele Ebenen hier als gleichbedeutend. Dieses Bestimmungsstück hängt also nur von zwei Winkeln ab, so dass die Quaternion im Ganzen vier veränderliche Stücke enthält. Denken wir uns durch den Nullpunkt O eine beliebige Ebene gelegt und darin ein Dreieck AOB verzeichnet, so haben wir das Bild einer eigentlichen Quaternion oder wenn wir wollen, diese selbst. Die Quaternion ändert sich jedoch nicht, d. i. geht in eine ihr gleiche über, wenn wir dieses Dreieck durch ein ihm einstimmig ähnliches in seiner Ebene ersetzen. An dem Dreiecke AOB ist eben nur wesentlich der Winkel AOB und das Verhältniss der Seiten $OB : OA$; der erstere heisst der Winkel, das letztere der Tensor der Quaternion.[1]) Ist der Winkel AOB ein rechter, so wird die soeben gegebene Deutung der Quaternion nicht benutzt, denn sie geht dann in einen auf ihre Ebene senkrechten Vector über.

---

1) Um zur numerischen Darstellung der im Text erwähnten Quaternion zu gelangen, denken wir uns zunächst durch O eine Senkrechte auf ihre Ebene gezogen und eine ihrer Richtungen als die positive Normale n auf diese festgesetzt. Mit Hilfe derselben bestimmen wir den positiven Drehungssinn der Ebene in der Art, dass wir dafür jene Drehung wählen, welche von der positiven Normalen aus gesehen als von rechts nach links (verkehrt dem Gange eines Uhrzeigers) gerichtet erscheint. Dieser entsprechend muss der gegebene Winkel $\varphi = A\widehat{O}B$, welcher zwischen -180^0 und 180^0 liegt,

Das Product zweier Vectoren ist nur dann ein Vector, wenn sie aufeinander senkrecht stehen und zwar steht derselbe senkrecht auf der Ebene der beiden Factoren. So ist $i \cdot j = k$, dagegen $j \cdot i = -k$; ferner $j \cdot k = i$, $k \cdot j = -i$; $k \cdot i = j$, $i \cdot k = -j$. Bei dieser Multiplication trifft somit das commutative Gesetz nicht zu. Die Quadrate $i \cdot i$, $j \cdot j$, $k \cdot k$ sind keine Vectoren, ein jedes ist gleich -1 gesetzt. Die Einheit 1 spielt auch im Systeme der Quaternionen die Rolle des Modulus der Multiplication, d. h. ist einer der zwei Factoren eines Productes gleich 1, so ist es gleich dem anderen. Die Multiplication der Quaternionen gehorcht wohl dem distributiven und associativen Gesetze, nicht aber dem commutativen.

Es würde zu weit führen, die einzelnen Schritte zu verfolgen, welche Hamilton bis zur Erfindung der Quaternionen zurücklegen musste. Er berichtet darüber in der Vorrede zu dem umfangreichen Werke: Lectures on Quaternions (1853), dessen Ziel nicht allein die Entwickelung

---

construirt werden. Sind ferner $\lambda \mu \nu$ die Cosinusse der Winkel der Richtung n mit den positiven Axenrichtungen xyz, so sei der Vector

$$\lambda i + \mu j + \nu k = n. \quad (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1)$$

Die Quaternion selbst ist dann die Zahl

$$\varrho \cos \varphi + (\varrho \sin \varphi)\, n$$

worin die positive Zahl ϱ ihren Tensor bedeutet.

$\lambda \mu \nu$ lassen sich bekanntlich durch die Cosinusse der Richtungen OA OB, welche mit $\alpha \beta \gamma$ bezw. $\alpha' \beta' \gamma'$ bezeichnet seien, in folgender Weise ausdrücken:

$$\varepsilon \sin \widehat{ab} \cdot \lambda = \beta \gamma' - \gamma \beta'$$

$$\varepsilon \sin \widehat{ab} \cdot \mu = \gamma \alpha' - \alpha \gamma'$$

$$\varepsilon \sin \widehat{ab} \cdot \nu = \alpha \beta' - \beta \alpha'.$$

ε ist $+1$ oder -1, je nachdem die Axenwinkel $\widehat{xy}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{yz}$ $+90^0$ oder -90^0 sind.

ihrer Theorie, sondern auch der Nachweis ihrer Verwendbarkeit in der Geometrie bildet. Das Buch ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, durch welche Hamilton die Theorie der Quaternionen in den akademischen Unterricht einführte.

Auch Deutsche haben sich um diese Theorie verdient gemacht. Hankel[1]) verpflanzte sie 1867 auf den Continent, indem er eine gedrängte Bearbeitung der genannten Lectures lieferte, welche, wie alle anderen Arbeiten Hankels, die Klarheit seiner Auffassung und ein ungewöhnliches Geschick in der Darstellung mathematischer Gegenstände bekundet.

Die wahre Bedeutung der Hamilton'schen Quaternionen hat indess erst Hr. Frobenius erkannt.[2]) Er legte sich die Aufgabe vor, alle Systeme von complexen Zahlen und zwar mit beliebigvielen Einheiten zu bestimmen, deren Multiplication den folgenden Bedingungen genügt. Sie soll distributiv und associativ sein, ferner soll in dem Systeme eine Zahl vorkommen, welche als der eine von den zwei Factoren eines Productes dieses stets dem anderen gleich macht, und endlich soll gelten der Satz: „Ist das Product zweier Zahlen gleich 0, so ist mindestens einer der Factoren gleich Null.“ Und er zeigte, dass diese Aufgabe nur zwei Lösungen zulasse, nämlich das System der complexen Zahlen der allgemeinen Arithmetik und das der Quaternionen. Das ist im höchsten Grade merkwürdig. Mögen wir noch so viele Einheiten zur Bildung von complexen Zahlen verwenden, niemals wiederholen sich ähn-

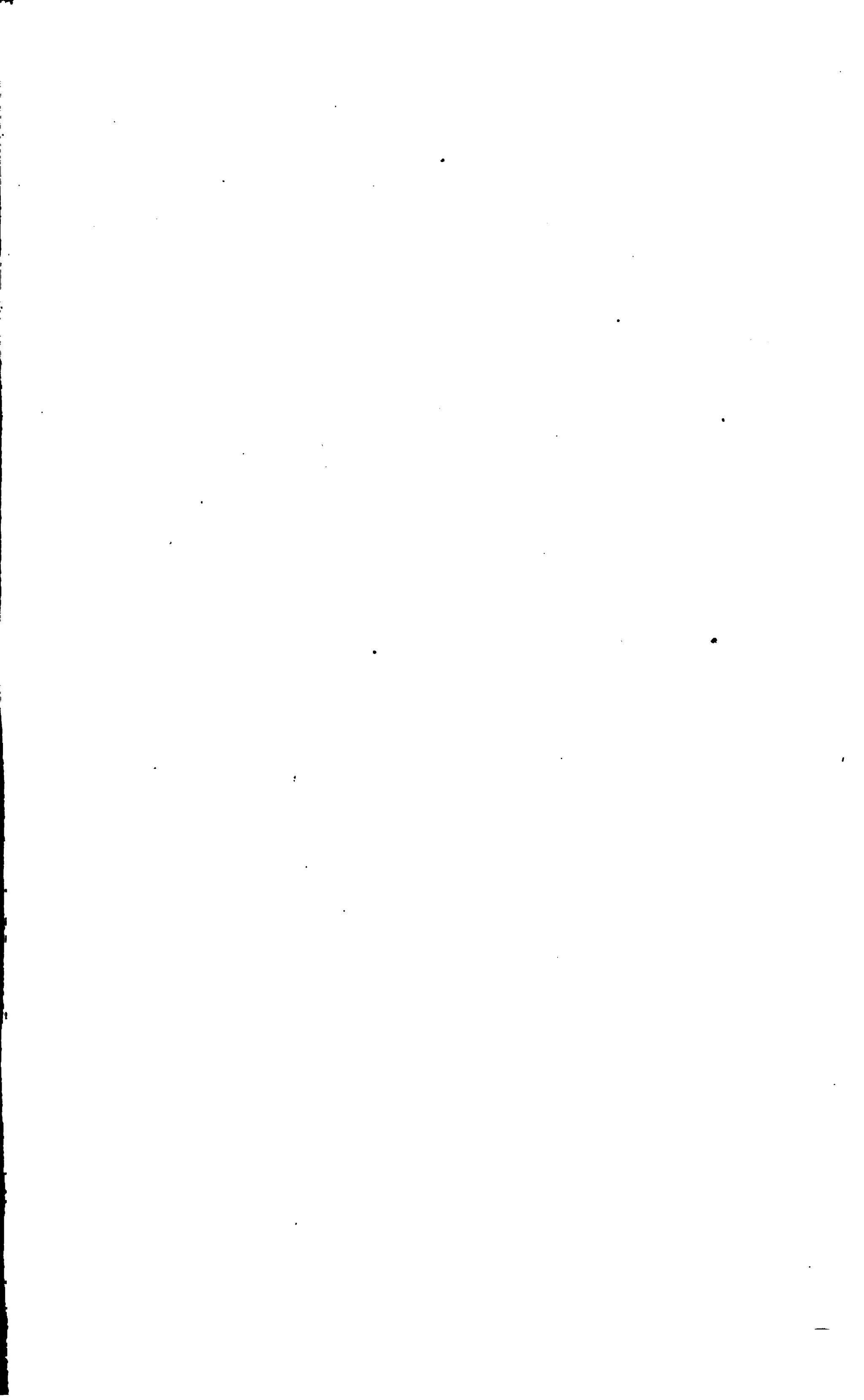
---

1) Vgl. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme (1867) S. 141—196. Am Schlusse steht die hier benutzte Uebersicht von Hamilton's Arbeiten über die Quaternionen.

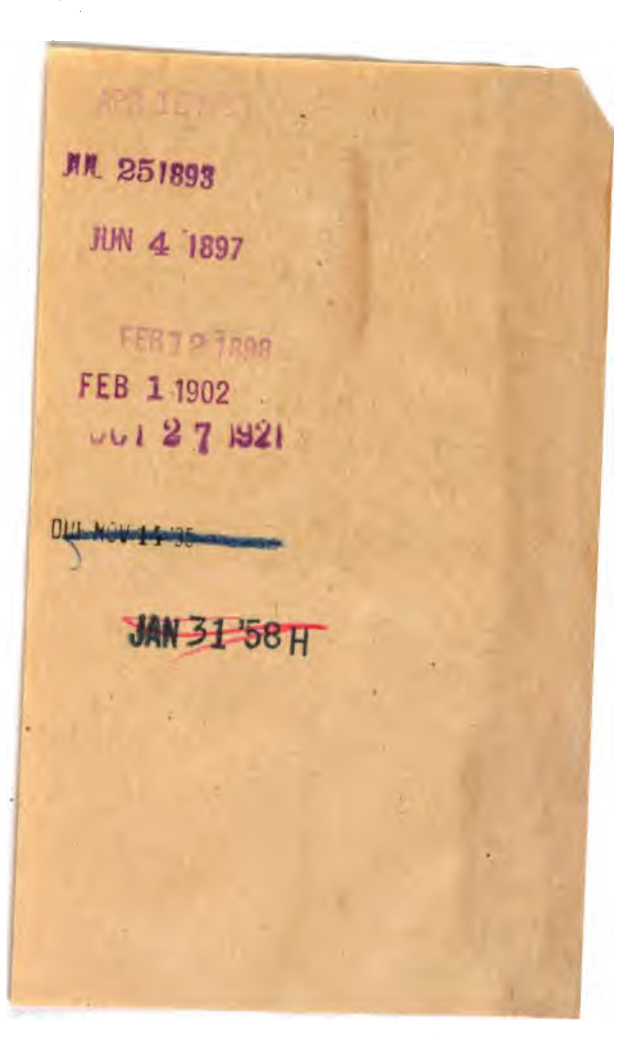
2) Borchardt, Journal der Mathematik 84. Bd. S. 63.

liche Verhältnisse, wie sie die beiden genannten Zahlensysteme darbieten. Diese kommen demnach in erster Linie in Betracht. In der That sind es einzig und allein die gemeinen complexen Zahlen, mit welchen man so rechnen kann, wie mit den reellen. Die allgemeine Arithmetik trägt, wie Gauss ja schon 1831 ausgesprochen hat, in sich selbst ihren Abschluss, so dass man eine weitere Bereicherung derselben weder zu erwarten noch zu befürchten braucht. Auf sie folgt die Theorie der Quaternionen, an Bedeutung zwar sie nicht erreichend, aber immerhin merkwürdig als Denkmal genialen Scharfsinnes und werthvoll für geometrische und mechanische Untersuchungen.

Meine Herren Commilitonen! Nach dem Herkommen habe ich mir erlaubt, ihnen eine Erörterung vorzutragen, welche dem von mir vertretenen Fache angehört. Es ist ein Gegenstand, welchen seiner Natur nach zahlreiche Bücher berühren müssen. Indess wird man nur aus wenigen darunter erfahren, welchen Aufwand an Nachdenken selbst derselbe verursacht, welche Feinheit der Unterscheidungen er hervorgerufen hat. Wie ein Geldstück durch den Verkehr abgenutzt und schliesslich unkenntlich gemacht wird, so ergeht es auch den Begriffen und Sätzen der Wissenschaft, wenn sie unter das grosse Publicum gelangen. Darum möge jeder von ihnen, welcher gründliche Kenntniss und wissenschaftliche Bildung zu erwerben strebt, sich an die Werke der Meister wenden oder, falls dies unthunlich sein sollte, sich einen Führer wählen, der ihn zu den Quellen und Originalen geleitet.






JUN 4 1897
FEB 1 1902
JAN 31 '58 H